Matematică 3 – Tema 2

1. Evaluaţi funcţia $f(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$ în punctele:

a) 1; b) $4i$; c) $1+i$.

2. Aflaţi părţile reale şi imaginare (u şi v) ale funcţiilor:

a) $f(z) = z^3 - 2z + 6$;

b) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z+1}$;

c) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$;

d) $f(z) = e^{2z+i}$.

3. Găsiţi domeniul şi imaginea funcţiei $f(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}$.

4. Arătaţi că funcţia $f(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ este periodică de perioadă 2π.

5. Găsiţi imaginea S' a mulţimii S, prin funcţia complexă $w = f(z)$, dacă:

(a) $f(z) = \overline{z}$, S este dreapta $y = x$;
(b) $f(z) = 3z$, S este semiplanul cu $Im(z) > 2$;
(c) $f(z) = 3z$, S este banda verticală infinită $2 \le Re(z) < 3$;
(d) $f(z) = iz + 4$, S este banda orizontală infinită $-1 < Im(z) < 2$.

6. Calculaţi:

(a) $\lim\limits_{z\to 1+i}(z^2+i)$; (b) $\lim\limits_{z\to i} z\cdot e^z$.

7. Calculaţi:

(a) $\lim\limits_{z\to 2i}(z^2-z)$;

(b) $\lim\limits_{z\to i} z^5 - z^2 + z$;

(c) $\lim\limits_{z\to e^{i\pi/4}}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$;

(d) $\lim\limits_{z\to 1+i}\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$;

(e) $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^4-1}{z+i}$;

(f) $\lim\limits_{z\to 2+i}\dfrac{z^2-(2+i)^2}{z-(2+i)}$;

(g) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+iz-2}{(1+2i)z^2}$;

(h) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{iz+1}{2z-i}$;

(i) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$;

(j) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z^2+z+1-i}$.

8. Arătaţi că f este continuă în punctul indicat:

(a) $f(z) = z^2 - iz + 3 - 2i, z_0 = 2 - i$;

(b) $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{z+iz} - 2z^2, z_0 = e^{i\pi/4}$;

(c) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3-1}{z^2+z+1}, & |z| \neq 1 \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, & |z| = 1 \end{cases}$, $z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.