SERII NUMERICE

Definiţia 3.1. Fie $(a_n)_{n\geq n_0}(n_0 \in \mathbb{N})$ un şir de numere reale şi $(s_n)_{n\geq n_0}$ şirul definit prin:

$$
\begin{aligned}
&s_{n_0} = a_{n_0},\\
&s_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1},\\
&s_{n_0+2} = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&s_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.
\end{aligned}
$$

Se numeşte serie de numere reale (sau serie numerică) perechea

$$\{(a_n)_n, (s_n)_n\}$$

formată din şirurile $(a_n)_n$ şi $(s_n)_n$.

a_n se numeşte termenul general al seriei, iar $(s_n)_n$ se numeşte şirul sumelor parţiale asociat şirului $(a_n)_n$.

Vom nota seria prin:

$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ sau $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + ... + a_n + ...$

Definiţia 3.2. Fie $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ o serie numerică şi (s_n) şirul sumelor parţiale.

a) Seria $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ se numeşte convergentă (sau seria $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge) dacă (s_n) este convergent. În acest caz, limita şirului (s_n) se numeşte suma seriei şi se notează prin $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

b) Seria $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ se numeşte divergentă (sau seria $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge) dacă nu este convergentă deci dacă (s_n) este divergent. Dacă limita şirului (s_n) este $+\infty$ sau $-\infty$, atunci se spune că suma seriei este $+\infty$ sau $-\infty$ şi se notează $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = +\infty$ sau $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = -\infty$.

Observaţia 3.3. (Serii remarcabile)

a) Seria geometrică de raţie q: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$ $(q^0 = 1)$.

Dacă $q \in (-\infty, -1]$, atunci seria este divergentă.

Dacă $q \in (-1, 1)$, atunci seria este convergentă şi are suma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Dacă $q \geq 1$, atunci seria este divergentă şi are suma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$.

b) Seria armonică generalizată: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Dacă $\alpha > 1$, atunci seria este convergentă.

Dacă $\alpha \leq 1$, atunci seria este divergentă. Pentru $\alpha = 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se numeşte seria armonică.

Observaţia 3.4. Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha$ cu termen general $a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (şirul (a_n) este constant).

Dacă $\alpha = 0$, atunci seria este convergentă şi are suma 0.

Dacă $\alpha \neq 0$, atunci seria este divergentă.

Definiţia 3.5. Fie $(b_n)_{n \geq n_0} (n_0 \in \mathbb{N})$ un şir de numere reale. O serie de forma $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} (b_n - b_{n-1})$ se numeşte serie telescopică. În acest caz, şirul sumelor parţiale este $s_n = b_n - b_{n_0}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 + 1$.

Definiţia 3.6. Dacă două serii $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ au aceeaşi natură (adică sunt în acelaşi timp convergente sau divergente), atunci vom nota $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$.

Teorema 3.7. (Condiţia necesară de convergenţă)
Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) este convergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

În consecinţă, rezultă:

Corolar 3.8. Dacă $(a_n)_n$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ sau dacă (a_n) este divergent (ceea ce vom nota prin $a_n \nrightarrow 0$), atunci seria $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Propoziţia 3.9. (Proprietăţi generale ale seriilor convergente)

i) Fie seria $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ($n_0 \in \mathbb{N}$). Dacă din şirul (a_n) se elimină sau se adaugă un număr finit de termeni, atunci natura seriei nu se schimbă (dar în caz de convergenţă, suma seriei se modifică). Astfel, vom face convenţia de a nota o serie prin $\sum a_n$ atunci când ne va interesa doar natura seriei (nu şi suma seriei).

ii) Dacă într-o serie convergentă se asociază termenii seriei în grupe finite, cu păstrarea ordinii termenilor, atunci se obţine tot o serie convergentă şi cu aceeaşi sumă. Dacă seria este divergentă, atunci rezultatul nu se mai păstrează. De exemplu, fie seria divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ şi seria:

$$[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + ... + [1 + (-1)] + ... \tag{1}$$

obţinută prin asocierea termenilor în grupe de câte doi termeni. Se observă că seria (1) este convergentă şi are suma 0.

iii) Fie seria $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) şi $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_{n+k}$. În caz de convergenţă, dacă $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = s$, atunci $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_{n+k} = s - (a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n_0+k-1})$. Invers, dacă $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_{n+k} = t$, atunci $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = t + (a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n_0+k-1})$.

iv) Fie $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) o serie numerică şi pentru orice $p \in \mathbb{N}$, fie seria $\sum\limits_{n=n_0+p+1}^{\infty} a_n$. Atunci $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=n_0+p+1}^{\infty} a_n$. În caz de convergenţă, se notează $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n = r_p$ (numit restul de ordin p al seriei $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$) şi avem $\lim\limits_{p\to\infty} r_p = 0$.

Teorema 3.10. (Teorema lui Cauchy de caracterizare)

O serie $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n \, (n_0 \in \mathbb{N})$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) = N \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall n \geq N, n \geq n_0$ şi $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Observaţia 3.11. Dacă seria $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ are proprietatea că $a_n \geq 0$, $\forall n \geq n_0$, atunci şirul sumelor parţiale este crescător. În acest caz, se spune că seria este cu termeni nenegativi.

Teorema 3.12. Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni nenegativi şi (s_n) şirul sumelor parţiale. Atunci seria $\sum a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă (s_n) este majorat.

Observaţia 3.13.

a) O serie cu termeni nenegativi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ este divergentă dacă şi numai dacă (s_n) este nemajorat ceea ce este echivalent cu faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

b) O serie cu termeni nenegativi are întotdeauna sumă în $[0, +\infty]$.

Teorema 3.14. (Criteriul de comparaţie de specia I)
Fie $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ şi $\sum\limits_{n\geq n_0} b_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ serii cu termeni nenegativi astfel încât $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$.

i) Dacă seria $\sum b_n$ converge, atunci seria $\sum a_n$ converge.

ii) Dacă seria $\sum a_n$ diverge, atunci seria $\sum b_n$ diverge.

Teorema 3.15. (Criteriul de comparaţie de specia a II-a)
Fie seriile $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ şi $\sum\limits_{n\geq n_0} b_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ astfel încât $a_n > 0, b_n > 0$ şi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ pentru orice $n \geq n_0$.

i) Dacă seria $\sum b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă.

ii) Dacă seria $\sum a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum b_n$ este divergentă.

Teorema 3.16. (Criteriul de comparaţie cu limită)
Fie $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ serii cu termeni pozitivi astfel încât există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda \in [0, +\infty]$.

i) Dacă $\lambda \in (0, +\infty)$, atunci $\sum a_n \sim \sum b_n$.
ii) Pentru $\lambda = 0$,
- dacă seria $\sum b_n$ converge, atunci seria $\sum a_n$ converge;
- dacă seria $\sum a_n$ diverge, atunci seria $\sum b_n$ diverge.

iii) Pentru $\lambda = +\infty$,
- dacă seria $\sum a_n$ converge, atunci seria $\sum b_n$ converge;
- dacă seria $\sum b_n$ diverge, atunci seria $\sum a_n$ diverge.

Corolar 3.17. Fie seria $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ unde $a_n > 0, b_n > 0, \forall n \geq n_0$. Dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lambda$ şi $\lambda \in (0, +\infty)$, atunci $\sum a_n b_n \sim \sum a_n$.

Teorema 3.18. (Criteriul lui Cauchy de condensare)
Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni nenegativi astfel încât şirul (a_n) este descrescător. Atunci $\sum a_n \sim \sum 2^n a_{2^n}$.

Teorema 3.19. (Criteriul rădăcinii cu mărginire)
Fie seria $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ cu termeni nenegativi.

i) Dacă există $M < 1$ astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \leq M$, $\forall n \geq n_0$, atunci seria $\sum a_n$ converge.
ii) Dacă există $M \geq 1$ astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \geq M$, $\forall n \geq n_0$, atunci seria $\sum a_n$ diverge.

Teorema 3.20. (Criteriul rădăcinii cu limită superioară)
Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni nenegativi.

i) Dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă.
ii) Dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, atunci seria $\sum a_n$ este divergentă.

Teorema 3.21. (Criteriul rădăcinii cu limită)
Fie seria $\sum a_n$ cu termeni nenegativi astfel încât există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$.

i) Dacă $\alpha < 1$, atunci seria $\sum a_n$ converge.
ii) Dacă $\alpha > 1$, atunci seria $\sum a_n$ diverge.

Teorema 3.22. (Criteriul raportului cu mărginire)
Fie $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ o serie cu $a_n > 0$ pentru orice $n \geq n_0$.

i) Dacă există $M < 1$ astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq M, \forall n \geq n_0$, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă.
ii) Dacă există $M \geq 1$ astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq M, \forall n \geq n_0$, atunci seria $\sum a_n$ este divergentă.

Teorema 3.23. (Criteriul raportului cu limite extreme)
Fie $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ o serie cu $a_n > 0$ pentru orice $n \geq n_0$.

i) Dacă $\limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, atunci seria $\sum a_n$ converge.
ii) Dacă $\liminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, atunci seria $\sum a_n$ diverge.

Teorema 3.24. (Criteriul raportului cu limită)
Fie $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ o serie cu $a_n > 0$ pentru orice $n \geq n_0$ astfel încât există limita $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$.

i) Dacă $\alpha < 1$, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă.
ii) Dacă $\alpha > 1$, atunci seria $\sum a_n$ este divergentă.

Teorema 3.25. (Criteriul lui Raabe - Duhamel)
Fie $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ o serie cu $a_n > 0$ pentru orice $n \geq n_0$ astfel încât există limita $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \beta$.

i) Dacă $\beta > 1$, atunci seria $\sum a_n$ converge.
ii) Dacă $\beta < 1$, atunci seria $\sum a_n$ diverge.

Teorema 3.26. (Criteriul lui Gauss)
Fie seria $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ cu $a_n > 0$ pentru orice $n \geq n_0$ astfel încât $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ se poate scrie în forma: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\beta}{n} + \frac{x_n}{n^{1+\alpha}}$, $\forall n \geq n_0$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ şi $(x_n) \subset \mathbb{R}$ este un şir mărginit.

i) Dacă $\beta > 1$, atunci seria $\sum a_n$ converge.
ii) Dacă $\beta \leq 1$, atunci seria $\sum a_n$ diverge.

Corolar 3.27. (Gauss) Fie seria $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ cu $a_n > 0$ pentru orice $n \geq n_0$ având proprietatea:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{P_1(n)}{Q_1(n)} + \frac{P_2(n)}{Q_2(n)} + \cdots + \frac{P_k(n)}{Q_k(n)} + \frac{x_n}{n^{1+\alpha}},$$

$\forall n \geq n_0$, unde P_i, Q_i sunt polinoame cu coeficienţi reali astfel încât: grad Q_i- grad $P_i = 1, \forall i = \overline{1,k}$, $\alpha \in (0,\infty)$ şi $(x_n) \subset \mathbb{R}$ este un şir mărginit. Notând cu b_i respectiv c_i, coeficientul dominant al polinomului P_i respectiv al polinomului Q_i, $\forall i = \overline{1,k}$ şi cu $\beta = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{b_i}{c_i}$, avem:

- pentru $\beta > 1$, seria $\sum a_n$ converge,
- pentru $\beta \leq 1$, seria $\sum a_n$ diverge.

Teorema 3.28. (Criteriul lui Dirichlet)
Fie seria $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n b_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ care verifică condiţiile:

i) seria $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ are şirul sumelor parţiale (s_n) mărginit (adică există $\alpha \geq 0$ astfel încât $|s_n| \leq \alpha, \forall n \geq n_0$),
ii) (b_n) este un şir descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Atunci seria $\sum a_n b_n$ este convergentă.

Teorema 3.29. (Criteriul lui Abel)
Fie $\sum a_n b_n$ o serie pentru care au loc afirmaţiile:

i) seria $\sum a_n$ este convergentă,
ii) (b_n) este un şir monoton şi mărginit.

Atunci seria $\sum a_n b_n$ este convergentă.

Definiţia 3.30. O serie numerică $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ se numeşte serie alternată dacă

$$a_n \cdot a_{n+1} < 0, \ \forall n \geq n_0.$$

În acest caz, a_n se mai scrie în forma $a_n = (-1)^n b_n$ pentru orice $n \geq n_0$ sau $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ pentru orice $n \geq n_0$, unde $b_n > 0$ pentru orice $n \geq n_0$ (se observă că $b_n = |a_n|$ pentru orice $n \geq n_0$).

Teorema 3.31. (Criteriul lui Leibniz)
Fie $\sum\limits_{n\geq n_0}(-1)^n b_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ o serie alternată $(b_n > 0, \forall n \geq n_0)$ astfel încât şirul (b_n) este descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Atunci seria $\sum\limits_{n\geq n_0}(-1)^n b_n$ este convergentă.

Definiţia 3.32.

a) O serie $\sum a_n$ se numeşte absolut convergentă dacă seria $\sum |a_n|$ este convergentă.
b) Seria $\sum a_n$ se numeşte semiconvergentă (sau condiţionat convergentă) dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, iar seria $\sum |a_n|$ este divergentă.

Teorema 3.33. Dacă o serie $\sum a_n$ este absolut convergentă, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă.

Observaţia 3.34.

a) Reciproca teoremei 3.33 nu este adevărată (vezi problema 3.1-10).
b) Dacă se aplică criteriul raportului sau cel al rădăcinii pentru seria $\sum |a_n|$ şi aceasta este divergentă, atunci şi seria $\sum a_n$ este divergentă (vezi problema 3.5).

Teorema 3.35. (Produs cu un scalar)
Fie seria $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Dacă $\lambda \neq 0$, atunci $\sum(\lambda a_n) \sim \sum a_n$ şi în caz de convergenţă avem $\sum\limits_{n\geq n_0}(\lambda a_n) = \lambda \sum\limits_{n\geq n_0} a_n$.

Teorema 3.36. (Suma a două serii)
Fie seriile $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ şi $\sum\limits_{n\geq n_0} b_n$ $(n_0 \in \mathbb{N})$.

i) Dacă ambele serii sunt convergente, atunci şi seria $\sum(a_n + b_n)$ este convergentă şi $\sum\limits_{n\geq n_0}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n\geq n_0} a_n + \sum\limits_{n\geq n_0} b_n$.
ii) Dacă seria $\sum a_n$ converge şi seria $\sum b_n$ diverge (sau invers), atunci seria $\sum(a_n + b_n)$ diverge.

Definiţia 3.37. (Produsul Cauchy al două serii)
Fie seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ şi fie (c_n) şirul definit prin:
$c_0 = a_0 b_0$,
$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$,

$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,$

....,

$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ se numeşte produs Cauchy al seriilor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Teorema 3.38. (Mertens)
Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ serii convergente. Dacă cel puţin una dintre serii este absolut convergentă, atunci seria produs Cauchy, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, este convergentă şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$

Dacă $a_n = b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci vom nota $\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\Big)$ prin $\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big)^2$.
A ridica seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ la pătrat înseamnă a efectua produsul Cauchy al seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ cu ea însăşi.

Corolar 3.39. (Teorema lui Cauchy)
Dacă două serii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs Cauchy, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, este absolut convergentă şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\Big)$.

Observaţia 3.40. (Calculul aproximativ al sumelor de serii)
Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ o serie convergentă cu suma s. În acest caz, şirul sumelor parţiale $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ converge la s iar restul de ordin n al seriei, $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = s - s_n$, converge la 0. Pentru determinarea cu aproximaţie a sumei s, se poate folosi formula de aproximare:

$$s \cong s_n,$$

fiind necesară o evaluare a erorii absolute $|r_n| = |s - s_n|$.

De exemplu:

a) Presupunem că există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $\lambda \in (0,1)$ astfel încât $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda$ pentru orice $n \geq n_0$. Atunci $|a_{n+1}| \leq \lambda|a_n|$, $|a_{n+2}| \leq \lambda|a_{n+1}| \leq \lambda^2|a_n|$,

$|a_{n+3}| \leq \lambda^3|a_n|, \cdots, |a_{n+p}| \leq \lambda^p|a_n|, \forall p \in \mathbb{N}^*$. Conform problemei 3.19, $|s - s_n| = |r_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k| \leq |a_n| \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda^k = |a_n| \cdot \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$. Deci $|s - s_n| \leq |a_n| \cdot \dfrac{\lambda}{1-\lambda}, \forall n \geq n_0$.

Să presupunem că vrem să calculăm s cu o aproximaţie dată $\varepsilon > 0$. Pentru aceasta, vom determina $N \in \mathbb{N}$, N minim şi $N \geq n_0$ astfel încât $|a_n| \cdot \dfrac{\lambda}{1-\lambda} \leq \varepsilon$ pentru $n \geq N$. Atunci $s \cong s_N$.

b) Fie (a_n) un şir descrescător de numere pozitive, cu $a_n \to 0$ astfel încât seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ este convergentă şi are suma s. Să arătăm că $|r_n| \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Fixând $n \in \mathbb{N}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$a_{n+1} - a_{n+2} \leq a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{k+1}a_{n+k} + (-1)^{k+2}a_{n+k+1} \leq a_{n+1}.$$

Trecând la limită pentru $k \to \infty$ se obţine $a_{n+1} - a_{n+2} \leq (-1)^{n+1}r_n \leq a_{n+1}$. Rezultă $|s - s_n| = |r_n| \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dacă vrem să calculăm s cu o aproximaţie dată $\varepsilon > 0$, atunci vom determina $N \in \mathbb{N}$, N minim astfel încât $a_{n+1} \leq \varepsilon$ pentru orice $n \geq N$. Atunci $s \cong s_N$.