## 2.6 Probleme

**1.** Aduceţi prin operaţiile **OE1** şi **OE2** următoarele matrice la o formă redusă pe linii şi determinaţi *rangul* lor.

**a)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Precizaţi pe ce coloane sunt aşezaţi pivoţii.

**2.** Considerăm sistemele liniare şi *omogene* având ca matrice a coeficienţilor necunoscutelor, pe rând, fiecare din cele patru matrice ale problemei precedente. Determinaţi soluţiile generale ale fiecărui sistem descompunându-le sub forma de combinaţii liniare, după modelul descris în exemplul 2.7.

**3.** Considerăm sistemele liniare şi *neomogene* corespunzătoare celor omogene precedente şi având ca termen liber o coloană cu un număr corespunzător de componente $b_1, b_2$ etc Determinaţi pentru fiecare dintre ele condiţia de compatibilitate pe care aceste componente trebuie să o satisfacă şi, în acest caz, soluţia generală corespunzătoare ca sumă dintre soluţia generală omogenă şi soluţia particulară neomogenă (vezi (2.3) din exemplul 2.1).

**4. Forma canonică pe linii** a unei matrice $m \times n$.
Forma redusă pe linii a unei astfel de matrice *nu este unică*. De pildă putem efectua o serie de permutări de linii înainte de alegerea fiecărui pivot

(ceea ce în practică se recomandă pentru îmbunătăţirea preciziei calculului). Utilizând şi operaţia **OE3**, reducerea pe linii poate continua până la obţinerea unei forme ce satisface, alături de condiţiile **1** şi **2** din definiţia 2.1, următoarea cerinţă:

*Toţi pivoţii sunt* 1 *şi restul elementelor de pe coloana lor sunt nule.*

Am realizat o astfel de reducere "totală" în exemplul 2.3 §1.5 la calculul inversei unei matrice prin metoda Jordan.

Spre deosebire de multitudinea de forme reduse pe linii a unei matrice, cea canonică este *unică.*

**Exerciţiu.** Aplicaţi metoda bazată pe cele trei operaţii elementare pentru a continua, în cazul celor patru matrice din primul exerciţiu, reducerile deja efectuate, până la forma canonică a fiecăreia dintre ele.

**5.** Pentru fiecare din matricele problemei **1**, determinaţi dimensiunile şi câte o bază în spaţiile lor fundamentale.

**6.** a) Pentru orice matrice de numere reale $A \quad m \times n$ şi $B \quad n \times p$ au loc incluziunile de subspaţii $\mathcal{I}(A),\ \mathcal{I}(AB) \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ şi $\mathcal{N}(B),\ \mathcal{N}(AB) \hookrightarrow \mathbb{R}^p$. Explicaţi-le şi utilizaţi echivalenţele:

$$z \in \mathcal{I}(A) \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n : z = Ay, \qquad z \in \mathcal{I}(AB) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^p : z = ABx$$

pentru a arăta că are loc relaţia $\mathcal{I}(AB) \hookrightarrow \mathcal{I}(A)$.
b) $A$ şi $B$ fiind matricele de la punctul a), deduceţi pe baza următoarei implicaţii $\forall x \in \mathbb{R}^p : Bx = \mathbf{0}_n \Rightarrow ABx = \mathbf{0}_m$ relaţia $\mathcal{N}(B) \hookrightarrow \mathcal{N}(AB)$.
c) Când $rangA = n$ atunci $\forall y \in \mathbb{R}^n : Ay = \mathbf{0}_m \Leftrightarrow y = 0_n$ (explicaţi!). Deduceţi din această echivalenţă egalitatea de subspaţii $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(AB)$.

**7.** a) Are loc următoarea proprietate:

Dacă $S_1$ şi $S_2$ sunt subspaţii din $\mathbb{R}^n$ a.î. $S_1 \hookrightarrow S_2$ atunci $dimS_1 \leq dimS_2$.

Utilizaţi-o, împreună cu incluziunile de subspaţii din problema **6**, pentru a deduce următoarele relaţii:

$$\begin{aligned} rangAB &\leq rangA, && (2.8)\\ rangAB &\leq rangB, && (2.9)\\ rangA = n &\Rightarrow rangAB = rangB, && (2.10) \end{aligned}$$

unde matricele $A$ şi $B$ sunt $m \times n$ şi respectiv $n \times p$.
b) Se consideră matricele $n \times n$ $A, B, C$, între care $A$ şi $C$ sunt nesingulare. Justificaţi egalităţile:

$$rangABC = rangBC = rangC^TB^T = rangB^T = rangB. \tag{2.11}$$

c) **Matrice de rang 1**. Rangul unei matrice $m \times n$ nenulă poate varia, aşa cum am văzut la pctul a), între 1 şi $min\{m, n\}$. Cele de rang 1 pot fi reprezentate ca produsul dintre o coloană $u \in \mathbb{R}^m$ şi o linie $v^T$ cu $v \in \mathbb{R}^n$. Daţi exemple de astfel de matrice, justificând de ce au rangul 1 şi determinaţi câte o bază în spaţiul liniilor, respectiv în cel al coloanelor fiecăreia.
d) **Matrice de rang maxim.** O matrice $A_{m\times n}$ are rangul maxim când este îndeplinită una din condiţiile 1 (sau una din echivalentele lor: 2 respectiv 3) din următorul tabel:

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $rangA = n$ | $rangA = m$ |
| 2) | $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$ | $\mathcal{I}(A) = \mathbb{R}^m$ |
| 3) | $\forall b \in \mathbb{R}^m : \ Ax = b$ are **cel mult** o soluţie | $\forall b \in \mathbb{R}^m : Ax = b$ are **cel puţin** o soluţie. |

Justificaţi echivalenţa condiţiilor aflate în prima, respectiv a doua, coloană. Tabelul poate fi extins şi cu alte perechi de condiţii, ca de exemplu

| | | |
|---|---|---|
| 4) | $\exists B_{n\times m} : BA = I_n$ | $\exists C_{n\times m} : AC = I_m$ |

Cele două noi matrice poartă numele:
$B$ = *inversă la stânga* a lui $A$, respectiv $C$ = *inversă la dreapta* a lui $A$.
**Exerciţiu.** Determinaţi inversa la stânga, respectiv pe cea la dreapta, pentru matricele $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ şi $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, rezolvând ecaţiile matriceale $XA_1 = I_2$, respectiv $A_2Y = I_2$. Veţi constata astfel că cele două inverse nu sunt unice, ci depind, fiecare, de parametri; în cazul de faţă: 2. Spre deosebire de inversa bilaterală a unei matrice pătrate şi nesingulare,

care este *unică*.

**8. Subspaţii complementare** în $\mathbb{R}^n$. Subspaţiile $V, W \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ se numesc astfel dacă $V \bigcap W = \{\mathbf{0}\}$ şi $V + W = \mathbb{R}^n$.

Arătaţi că subspaţiul $V = \mathcal{N}([1,0,0])$ este complementar în $\mathbb{R}^3$, atât cu $W_1 = \mathcal{I}\left([1,0,1]^T\right)$, cât şi cu $W_2 = \mathcal{I}\left([1,1,0]^T\right)$. Cu câte subspaţii $W_i$ este complementar, în $\mathbb{R}^3$, subspaţiul $V$? ( Încercaţi şi o explicaţie geometrică.)

*Indicaţie.* Puteţi utiliza, în locul definiţiei complementarităţii, condiţiile: $dim(V \bigcap W) = 0$ şi $dimV + dimW = n$ cu care ea este echivalentă.

**9.** Determinaţi dimensiunile şi câte o bază în subspaţiile $V + W$ şi $V \bigcap W$ dacă

$$V = \mathcal{I}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right), \quad W = \mathcal{I}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right).$$

**10.** Se consideră matricele următoare

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

şi subspaţiile: $V_1 = \mathcal{I}(A),\ V_2 = \mathcal{N}(B),\ V_3 = \mathcal{I}(C)$.

Determinaţi dimensiunile şi câte o bază în subspaţiile:

$$V_4 = V_1 + V_2,\ V_5 = V_3 + V_4,\ V_6 = V_1 \bigcap V_2,\ V_7 = V_3 + V_6.$$

Care dintre aceste subspaţii coincid şi de ce?