1.7 Probleme

1. Reprezentaţi grafic ecuaţiile următoarelor sisteme liniare pentru a explica geometric incompatibilitatea sau, după caz, nedeterminarea lor:

a) $\begin{cases} x - 2y &= 1 \\ -2x + 4y &= -2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + y &= 1 \\ 4x + 4y &= 2 \end{cases}$.

2. Rezolvaţi prin substituţii: *regresive* în primul caz şi *progresive* în cel de al doilea, sistemele liniare triunghiulare următoare:

a) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z &= 1 \\ y - 7z &= -8 \\ 4z &= 3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 5x &= 3 \\ 10x - 5y &= -14 \\ y + 3z &= 3 \end{cases}$.

3. Rezolvaţi prin metoda eliminării succesive a necunoscutelor sistemele liniare nesingulare următoare:

a) $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+3z & = & 4 \\ 2x+4y+9z & = & 11 \\ 3x+7y+2z & = & 7 \end{array}\right.$; **b)** $\left\{\begin{array}{lcr} 3x-2y+u & = & -2 \\ 5x+2z-2u & = & -19 \\ 3x+y+4z+7u & = & 22 \\ -2x+5y+z+6u & = & 8 \end{array}\right.$.

3. Reprezentaţi matriceal - conf. §1.3 - paşii trunghiularizării sistemului din exerciţiul 3a) , construind matricele E_{21}, E_{31}, P_{23} corespunzătoare şi obţinând astfel descompunerea $PA = LU$ pentru matricea acestui sistem.

4. Determinaţi prin metoda Jordan[14] (vezi §1.5, Aplicaţia 1) inversele următoarelor matrice pătrate

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$.

Explicaţi, urmărind calculul inversei matricei inferior triunghiulare de la pctul d), de ce inversa unei matrice inferior trunghiulare şi 1-diagonale este întotdeauna o matrice de acelaşi tip. Aceeaşi proprietate şi în cazul transpusei sale - matricea superior triunghiulară şi 1-diagonală.

5. Aplicaţi metoda de inversare Jordan matricei

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şi constataţi blocarea sa. Explicaţia: matricea este *singulară.* Aşadar când aplicăm acest algoritm unei matrice, nu este necesară verificarea prealabilă a nesingularităţii ei. Finalizarea procesului de inversare este însăşi proba acestei nesingularităţi.

6. Construiţi descompunerea LDU pentru următoarele matrice

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; **d)*** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Constataţi astfel că, în cazul simetric această descompunere capătă forma simetrică LDL^T (cu excepţia pctului d).

[14] Câteodată numită metoda Gauss-Jordan.

7. Pentru matricea de la punctul d) precedent - s-o notăm A - descompunerea LU, deci şi LDU, necesită în prealabil o repoziţionare a elementelor de pe diagonală. Pentru a nu strica simetria lui A, aceasta se realizează printr-o *dublă permutare* - de linii şi de coloane: $A' = P_{23}AP_{23}$. Efectuaţi această operaţie, apoi construiţi descompunerea simetrică LDL^T pentru matricea A'.

8. Determinantul matricei $A_{n\times n}$, notat $Det(A)$, este o funcţie ce-i asociază un număr depinzând de elementele lui A. Formula generală de calcul - complicată - devine simplă atunci când A are forma *trunghiulară*:

$$Det(A) = Det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Utilizăm o proprietate a acestei funcţii, anume că determinantul produsului a două matrice $n \times n$: A şi B, este egal cu produsul determinanţilor factorilor

$$Det(AB) = Det(A)Det(B).$$

Astfel, dacă A are descompunerea LU, atunci

$$Det(A) = Det(L) \times Det(U) = 1 \times u_{11}u_{22}\dots u_{nn},$$

unde $u_{ii}, i = 1, \dots, n$ reprezintă elementele de pe diagonala lui U.
Exemplul 1. Întrucât are loc descompunerea $A = LU$ următoare (verificaţi!)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -12 & -4 & 9 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

rezultă că $Det(A) = 1 \times 3 \times 4 \times (-1) = -12$.
Dar când matricea A are o descompunere de forma $PA = LU$, atunci aplicând determinanţii obţinem

$$Det(P)Det(A) = Det(L)Det(U).$$

Deoarece P este, în cazul general, produsul unor de matrice de permutare P_{ij} (vezi §1.4), fie k numărul acestora, deoarece $Det(P_{ij}) = -1$, rezultă că formula anterioară va căpăta forma $(-1)^k Det(A) = Det(L)Det(U)$, sau mai simplu

$$Det(A) = (-1)^k u_{11} u_{22} \dots u_{nn} \tag{1.9}$$

Exemplul 2. Matricea $A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -12 & -4 & 9 \end{bmatrix}$ nu are o descompunere $A' = LU$ ci una $PA' = LU$ (de ce?). Astfel $P_{23}A'$ fiind cea din exemplul precedent, va avea descompunerea LU determinată anterior şi obţinem $Det(A') = -Det(A) = -1 \times 3 \times 4 \times (-1) = 12$.

Exerciţiu. Fără a construi descompunerile $A = LU$ sau $PA = LU$, determinaţi prin operaţiile elementare **OE1** şi **OE2** pivoţii matricelor următoare, precum şi numărul eventualelor permutări de linii necesare obţinerii lor, deducând cu formula (1.7) valoarea determinanţilor fiecăreia din ele:

$$a) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; b) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, d) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$