3.6 Probleme

1. Aplicaţia liniară $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ are în baza canonică $\{e_1, e_2\}$ matricea asociată $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Determinaţi matricea P' asociată lui p în baza $\{f_1, f_2\} = \{[1,-1]^T/\sqrt{2},\ [1,1]^T/\sqrt{2}\}$. Puteţi descifra acum semnificaţia geometrică a transformării pe care p o exercită asupra vectorilor planului?

2. Se consideră aplicaţia liniară $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită astfel

$$f([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1 + x_2 + ax_3, x_1 + ax_2 + x_3, ax_1 + x_2 + x_3]^T.$$

a)Determinaţi matricea asociată ei în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$ şi valorile lui a pentru care aplicaţia f_a este un izomorfism.
b)Determinaţi nucleul şi imaginea aplicaţiei f_{-2}.
c)Determinaţi matricea asociată aplicaţiei f_{-2} în baza
$\{[-1, 0, 1]^T, [1, -2, 1]^T, [1, 1, 1]^T\}$.

3. Aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformă primele două coloane a_1, a_2, ale matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

respectiv în primele două coloane e_1 şi e_2 ale matricei unitate I_3.
a) Stabiliţi o relaţie de dependenţă liniară între coloanele lui A şi deduceţi din ea vectorul $f(a_3)$, a_3 fiind ultima coloană acestei matrice.
b) Din informaţiile obţinute până acum puteţi determina vectorul $f(e_3)$? Justificaţi-vă răspunsul.
c) Presupunând că $f(e_3) = e_3$ deduceţi matricea asociată acestei aplicaţii liniare în baza $B = \{a_1, a_2, e_3\}$ si precizaţi dacă f este injectivă şi/sau surjectivă.

4. Se consideră matricele $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ şi $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
a) Determinaţi $dim(\mathcal{I}(B_1) + \mathcal{I}(B_2))$ şi o bază a acestui spaţiu.
b) Determinaţi, cu formula (3.2), $dim(\mathcal{I}(B_1) \bigcap \mathcal{I}(B_2))$.
c) Utilizaţi modelul descris în exemplul **3.3** pentru a construi un izomorfism ce transformă fiecare $z \in \mathcal{N}([B_1|B_2])$ într-un element din subspaţiul $\mathcal{I}(B_1) \bigcap \mathcal{I}(B_2)$. Transformaţi prin acest izomorfism o bază obţinută în $\mathcal{N}([B_1|B_2])$ pentru a determina o bază în $\mathcal{I}(B_1) \bigcap \mathcal{I}(B_2)$.

5. Se consideră aplicaţiile liniare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$ şi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x) = Bx$ unde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a)Care dintre ele este injectivă şi care este surjectivă?
b)Determinaţi aplicaţiile liniare $h_1 = f \circ g$ şi $h_2 = g \circ f$. Care dintre ele este

izomorfism?
c)Determinaţi matricea asociată aplicaţiei h_1 în baza $B_1 = \{[1,-1]^T,\ [5,1]^T\}$, respectiv matricea asociată aplicaţiei h_2 în baza $B_2 = \{[1,0,-1]^T, [-1,2,3]^T, [-2,1,2]^T\}$.

6.a)Putem completa tabelul din problema 7d §2.6 - referitoare la o matrice $A_{m\times n}$ de rang maxim - cu încă o pereche de condiţii echivalente cu celelalte, dar referitoare la aplicaţia $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

5)	f_A este *injectivă*	f_A este *surjectivă*

Arătaţi că fiecare din condiţiile 5 este echivalentă cu condiţia 2 de pe coloana corespunzătoare a tabelului menţionat.
b) Arătaţi că orice aplicaţie liniară $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este injectivă d.n.d. este surjectivă.