Teorema Reziduurilor şi Bucuria Integralelor Reale

Prezentare de Alexandru Negrescu

Integrale cu funcţii raţionale ce depind de $\sin t$ **şi** $\cos t$

Cu notaţia $z = e^{it}$, avem:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \sin t &= \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \\ \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}z}{iz}, \end{aligned}}$$

iar integrarea se va face de-a lungul cercului unitate.

Problemă rezolvată. Arătaţi că

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2} - \cos t} = 2\pi.$$

Soluţie. Cu schimbările de mai sus, integrala devine:

$$\begin{aligned} I = \oint_C \frac{\frac{\mathrm{d}z}{iz}}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} &= \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{-\frac{i}{2}(z^2 - 2\sqrt{2}z + 1)} = \\ &= -\frac{2}{i}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}, \end{aligned}$$

unde $C : |z| = 1$. Observăm că expresia de integrat admite doi poli simpli: $z_1 = \sqrt{2} + 1$ şi $z_2 = \sqrt{2} - 1$. Însă, în interiorul curbei C se află doar polul z_2.

Astfel, **Teorema Reziduurilor** ne dă

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}\left(\frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}, z_2\right) = \\ &= -\frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \lim_{z \to \sqrt{2} - 1}\left(\left[z - \left(\sqrt{2} - 1\right)\right] \cdot \frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}\right) = \\ &= -\frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \lim_{z \to \sqrt{2} - 1} \frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)} = \\ &= -\frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi. \end{aligned}$$

□

Probleme propuse. Evaluaţi următoarele integrale reale, utilizând metoda prezentată mai sus:

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos t}\mathrm{d}t, a>1;$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t;$

3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{13+5\sin t}\mathrm{d}t;$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2}\mathrm{d}t;$

5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\sin t}\mathrm{d}t, 0<|a|<1;$

6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos t}\mathrm{d}t, 0<|a|<1;$

7) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{13-12\cos 2t}\mathrm{d}t;$

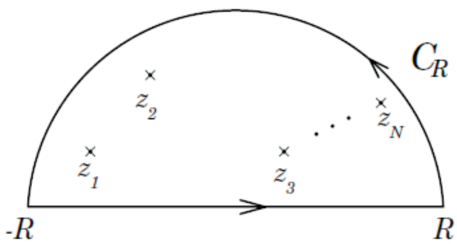
8) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos^3 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t.$

Integrale improprii

Problemă rezolvată. Evaluaţi integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

Soluţie. Considerăm curba C, reuniunea segmentului $[-R;R]$ cu semicercul C_R – de rază R suficient de mare încât să conţină toţi polii expresiei de sub integrală din semiplanul superior.



Integralei reale din enunţ îi ataşăm integrala complexă

$$J=\oint_C \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z.$$

Vom evalua această integrală cu **Teorema Reziduurilor**. Singularităţile (polii) funcţiei de sub integrală sunt soluţiile ecuaţiei $z^2=-1=\cos\pi+i\sin\pi$, adică:

$$z_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}, k=\overline{0,1}.$$

Dintre acestea, doar polul de ordinul întâi $z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$ este situat în semiplanul superior. Aşadar,

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}\left(\frac{1}{z^2+1}, z_0\right) = 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right) = \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z\to i}\left((z-i)\cdot\frac{1}{z^2+1}\right) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i}\left((z-i)\cdot\frac{1}{(z-i)(z+i)}\right) = \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \pi. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, integrala J este egală cu suma:

$$\int_{[-R;R]}\frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z + \int_{C_R}\frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = \underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x}_{J_1} + \underbrace{\int_{C_R}\frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z}_{J_2}.$$

Folosind **Inegalitatea ML** vom arăta că $\lim\limits_{R\to\infty} J_2 = 0$. Pe C_R, avem că $|z| = R$, deci

$$\left|\frac{1}{z^2+1}\right| = \frac{1}{|z^2+1|} \le \frac{1}{||z|^2-1|} = \frac{1}{R^2-1},$$

şi atunci

$$\left|\int_{C_R}\frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z\right| \le M\cdot L = \frac{1}{R^2-1}\cdot\pi R = \frac{\pi R}{R^2-1}.$$

Când $R\to\infty$, cantitatea $\frac{\pi R}{R^2-1} \to 0$, şi atunci $\lim\limits_{R\to\infty} J_2 = 0$.

Trecând la limită (pentru $R\to\infty$) în relaţia $J = J_1 + J_2$, concluzionăm că

$$\pi = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

$\square$

Probleme propuse. Evaluaţi următoarele integrale reale, utilizând metoda prezentată mai sus:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$;

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}\mathrm{d}x$;

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$;

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x$;

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x;$

6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\mathrm{d}x;$

7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x;$

8) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}x;$

9) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x;$

10) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(4x^2+1)^3}\mathrm{d}x.$

Problemă rezolvată. Evaluaţi integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

Soluţie. La fel ca mai devreme, considerăm curba C, reuniunea segmentului $[-R;R]$ cu semicercul C_R – de rază R suficient de mare încât să conţină toţi polii expresiei de sub integrală din semiplanul superior.

Integralei reale din enunţ îi ataşăm integrala complexă

$$I = \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}\mathrm{d}z.$$

Vom evalua această integrală cu **Teorema Reziduurilor**. Ca în exerciţiul precedent, observăm că doar polul de ordinul întâi $z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$ este situat în semiplanul superior. Aşadar,

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, z_0\right) = 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right) = \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z\to i}\left((z-i)\cdot\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i}\left((z-i)\cdot\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}\right) = \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{\pi}{e}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, integrala I este egală cu suma:

$$\int_{[-R;R]} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\mathrm{d}z + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\mathrm{d}z = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\mathrm{d}z}_{I_2}.$$

Următorul rezultat:

Lema lui Jordan. Fie f o funcţie analitică, unde $|z| > c > 0$ Imz >0. Dacă $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, Atunci, pentru orice $m > 0$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{imz}\cdot f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

ne asigură că $\lim\limits_{R\to\infty} I_2 = 0$.

Trecând la limită (pentru $R \to \infty$) în relaţia $I = I_1 + I_2$, obţinem că:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{e} &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1} \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} \mathrm{d}x + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

de unde concluzionăm că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{e} \text{ şi } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} \mathrm{d}x = 0.$$

□

Probleme propuse. Evaluaţi următoarele integrale reale, utilizând metoda prezentată mai sus:

1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+9} \mathrm{d}x$;

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x$;

3) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} \mathrm{d}x, a > 0$;

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{a^2+x^2} \mathrm{d}x, m > 0$.

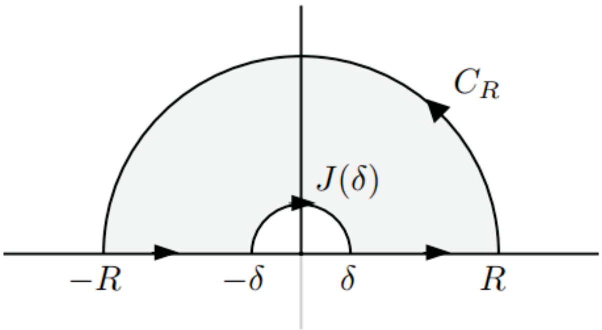
Problemă rezolvată. Evaluaţi integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$

Soluţie. Integralei reale din enunţ îi ataşăm integrala complexă

$$I = \oint_C \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z.$$

Pentru că polul expresiei de sub integrală ($z_0 = 0$) este situat pe axa reală, considerăm curba C, reuniunea segmentelor $[-R; -r]$ şi $[r; R]$ cu semicercurile C_R – de rază R suficient de mare încât să conţină toţi polii expresiei de sub integrală din semiplanul superior – şi C_r – de rază r suficient de mică, dar să conţină polii de pe axa reală ai expresiei de sub integrală.



Deoarece în interiorul curbei noastre, integrala nu are niciun pol (i.e. funcţia este analitică), conform **Teoremei lui Cauchy**,

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z = 0.$$

Pe de altă parte, integrala I este egală cu suma:

$$\begin{aligned} I &= \int_{[-R;-r]} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_{-C_r} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_{[r;R]} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z = \\ &= \int_{-R}^{r} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x + \int_{-C_r} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

În continuare, avem nevoie de următorul rezultat:

Teoremă (comportamentul pentru $r \to 0$). Dacă f îl are drept pol simplu pe c, de pe axa reală, atunci,

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} f(z) \mathrm{d}z = \pi i \cdot \mathrm{Rez}\left(f(z), c\right),$$

unde C_r este cercul $|z - c| = e^{it}, t \in [0; \pi]$.

Aşadar,

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z &= \pi i \cdot \mathrm{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \pi i \cdot \lim_{z \to 0} \left((z - 0) \cdot \frac{e^{iz}}{z}\right) = \\ &= \pi i \cdot \lim_{z \to 0} e^{iz} = \pi i. \end{aligned}$$

Conform **Lemei lui Jordan**, $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z = 0$, şi trecând la limită (pentru $R \to \infty$ şi $r \to 0$) în scrierea lui I ca sumă, de mai sus, găsim că

$$\begin{aligned}\pi i &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left(\int_{-R}^{r}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x + \int_{r}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x + i\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

de unde, prin identificarea părţii imaginare, găsim că

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi.$$

□

Probleme propuse. Evaluaţi următoarele integrale reale, utilizând metoda prezentată mai sus:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x;$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2-2x+2)}\mathrm{d}x;$

3) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x;$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x.$